Matemáticas Aplicadas

para Diseño de Videojuegos

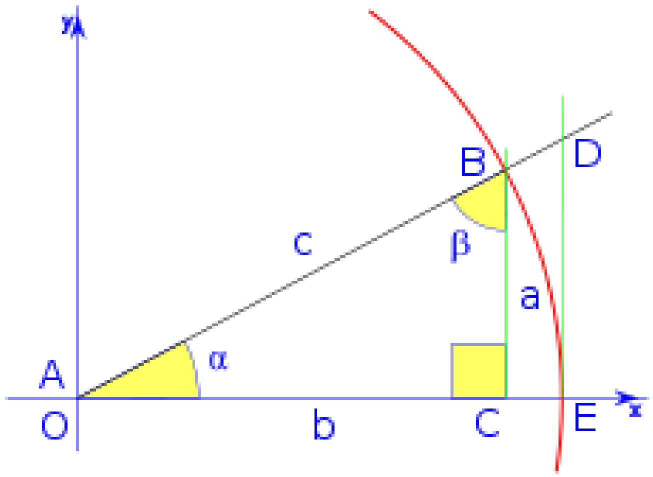
4. Trigonometría

Contenidos

- Ángulos: unidades de medida.
- Razones trigonométricas.
- Funciones trigonométricas.
- Coordenadas polares y esféricas.
- Identidades trigonométricas.

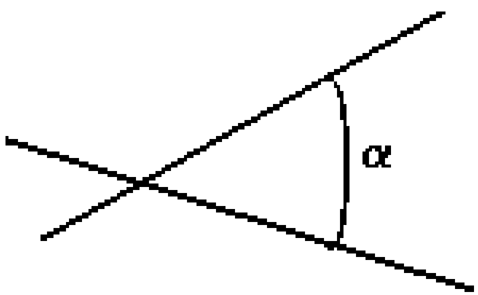
Trigonometría

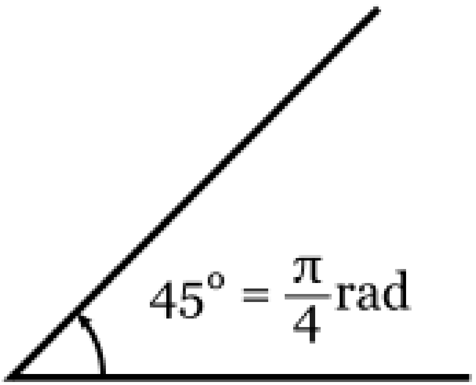
- Es la rama de la matemáticas que estudia la relación entre los ángulos y los lados de los triángulos.



Ángulos: Unidades de medidas

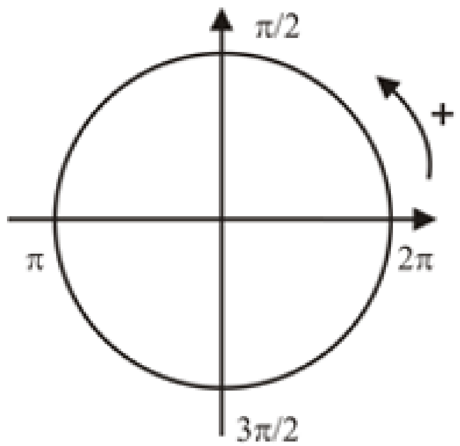
- Las principales unidades de medidas de los ángulos son los **radianes** y los **grados hexadesimales**.

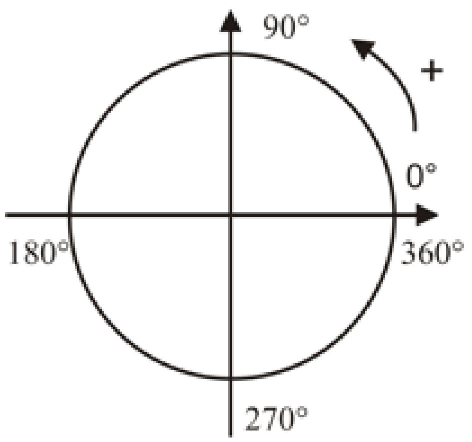




Ángulos: Unidades de medidas

- Las principales unidades de medidas de los ángulos son los **radianes** y los **grados hexadecimales**.





Ángulos: Unidades de medidas

- Nosotros estamos más relacionados con los grados. Sin embargo, **el radián es el usado en el Sistema Internacional.**

- Por lo que debemos realizar conversiones:

$$\frac{360}{2\pi} = \frac{180}{\pi} = \frac{grados}{radianes} \longrightarrow radianes = \frac{grados * \pi}{180}$$

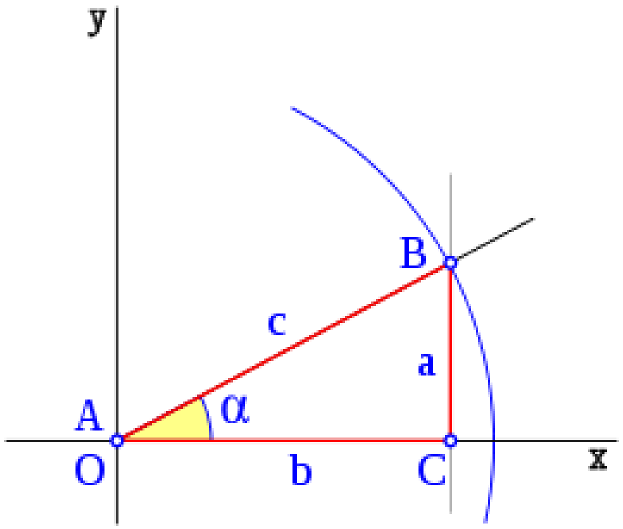
Razones Trigonométricas

- El triángulo rectángulo ACB lo usaremos para definir razones trigonométricas: seno, coseno y tangente.

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\overline{CB}}{\overline{AB}}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$$

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\overline{CB}}{\overline{AC}}$$



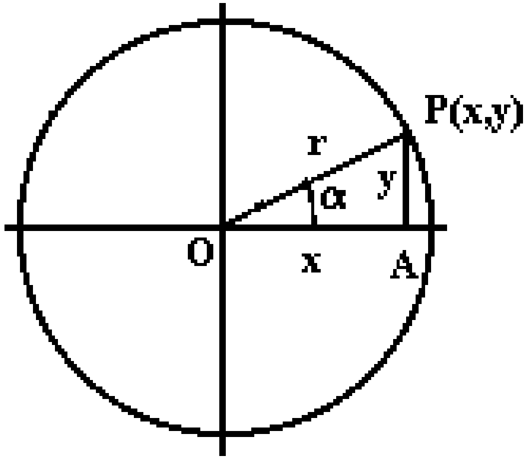
Razones Trigonométricas

- Dada una circunferencia de radio r, si tomamos el arco AP, donde A es un punto del semi-eje positivo de las x y P(x,y), el punto del extremo, se definen las siguientes razones trigonométricas.

$$\sin \alpha = \frac{y}{r}$$

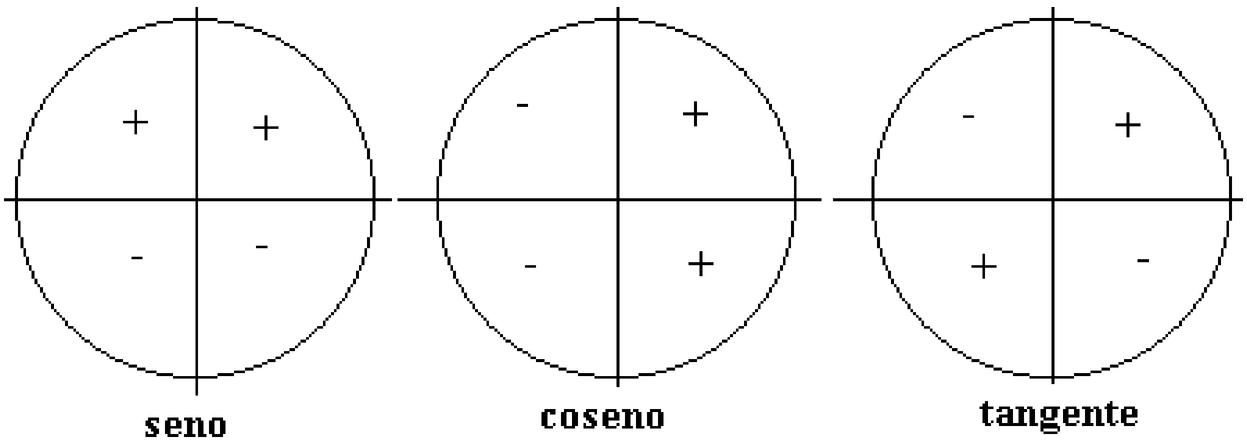
$$\cos \alpha = \frac{x}{r}$$

$$\tan \alpha = \frac{y}{x}$$



Razones Trigonométricas

- Signos de las razones dependiendo del cuadrante.



Razones trigonométricas recíprocas

- Se definen las razones trigonométricas recíprocas como el inverso multiplicativo de las razones trigonométricas:
  - Secante, Cosecante y Cotangente.

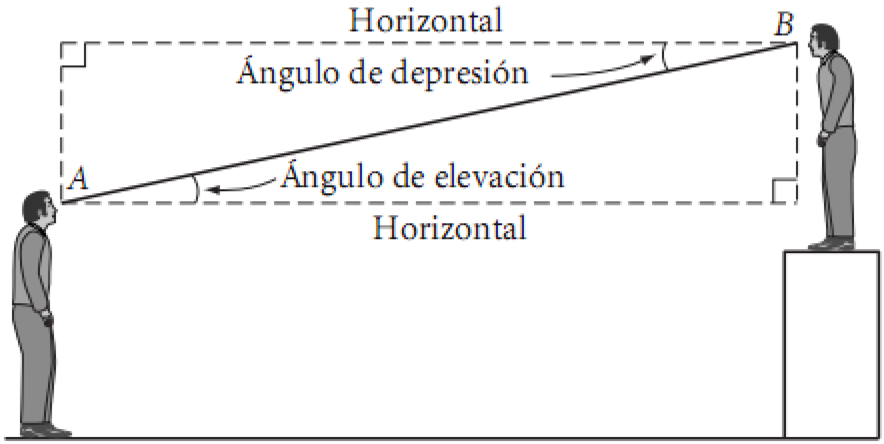
$$\csc\alpha = \frac{1}{\mathrm{sen}\alpha} = \frac{c}{a}$$

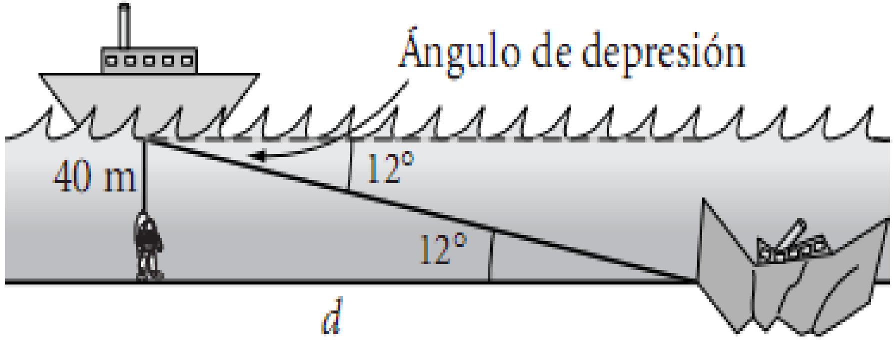
$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{c}{b}$$

$$\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{b}{a}$$

Problemas

- Ángulo de elevación y Ángulo de depresión.





Problemas

- Un problema típico en videojuegos es el seguimiento de enemigos:
  - ¿Qué pasa si el enemigo conoce el ángulo entre él y el protagonista?

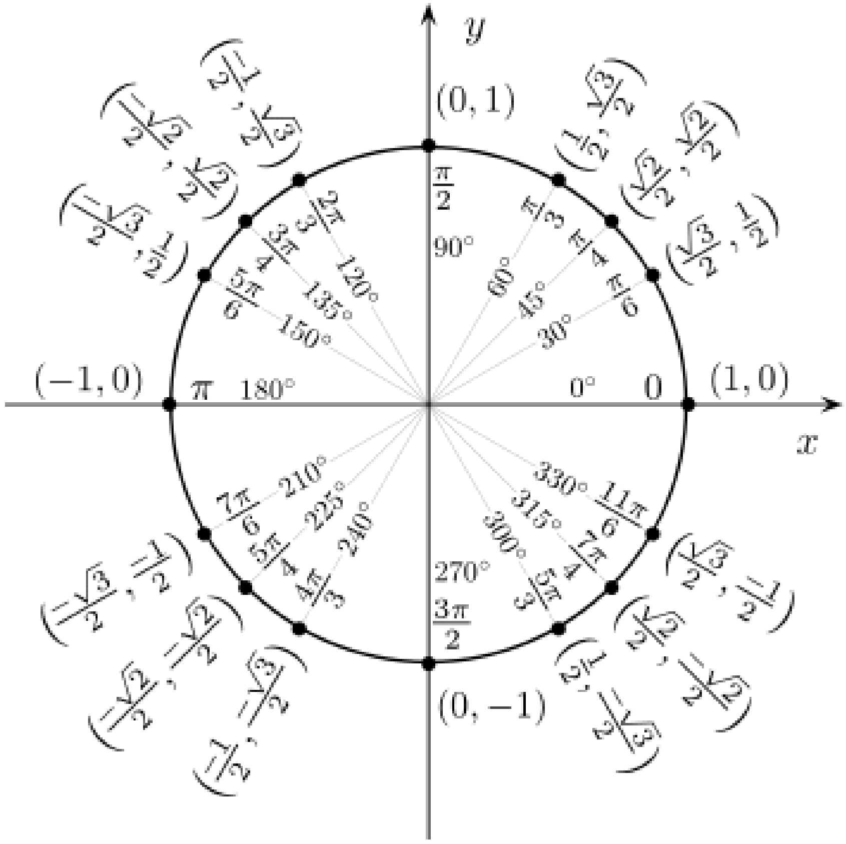
- Al conocer el ángulo entre los 2, conocemos la pendiente: $\tan \alpha$

- Por lo que se utiliza la ecuación de la recta para el movimiento del enemigo:

$$y = \tan \propto (x - x_e) + y_e$$

Funciones Trigonométricas

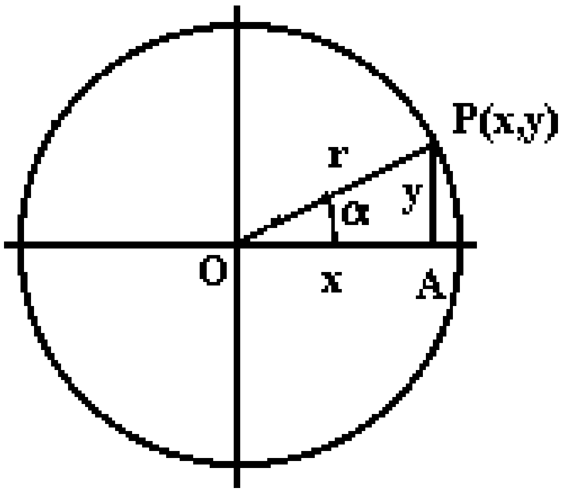
- Las funciones trigonométricas pueden ser definidas a través de la circunferencia unitaria (radio=1), centrada en el origen.



Funciones Trigonométricas

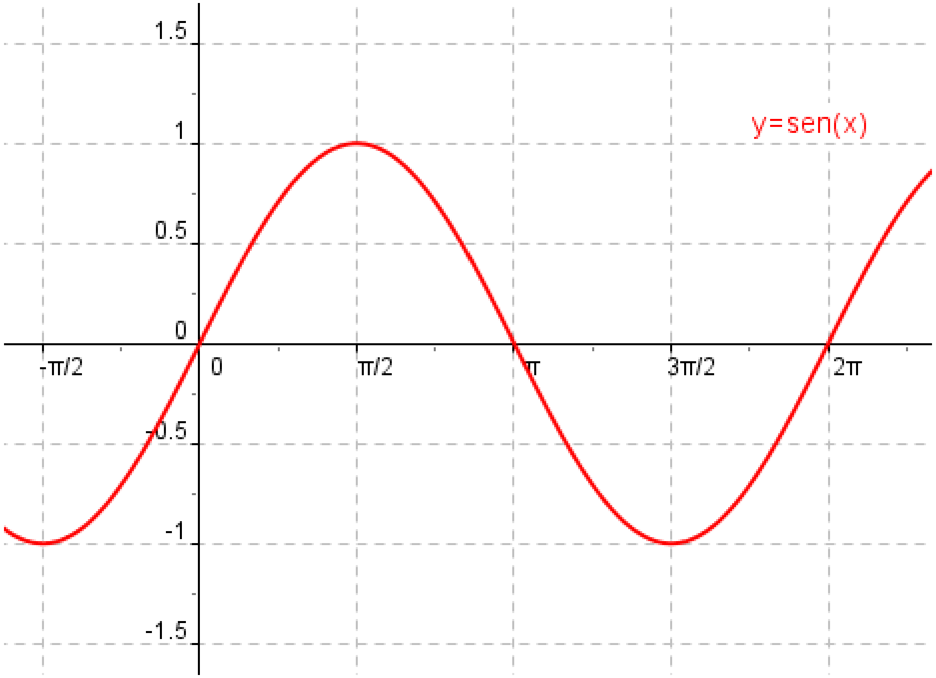
- Por lo que si r = 1, se cumple lo siguiente:

$$\sin \propto = y \qquad \cos \propto = x$$



Función seno

$$f(x) = \sin x$$

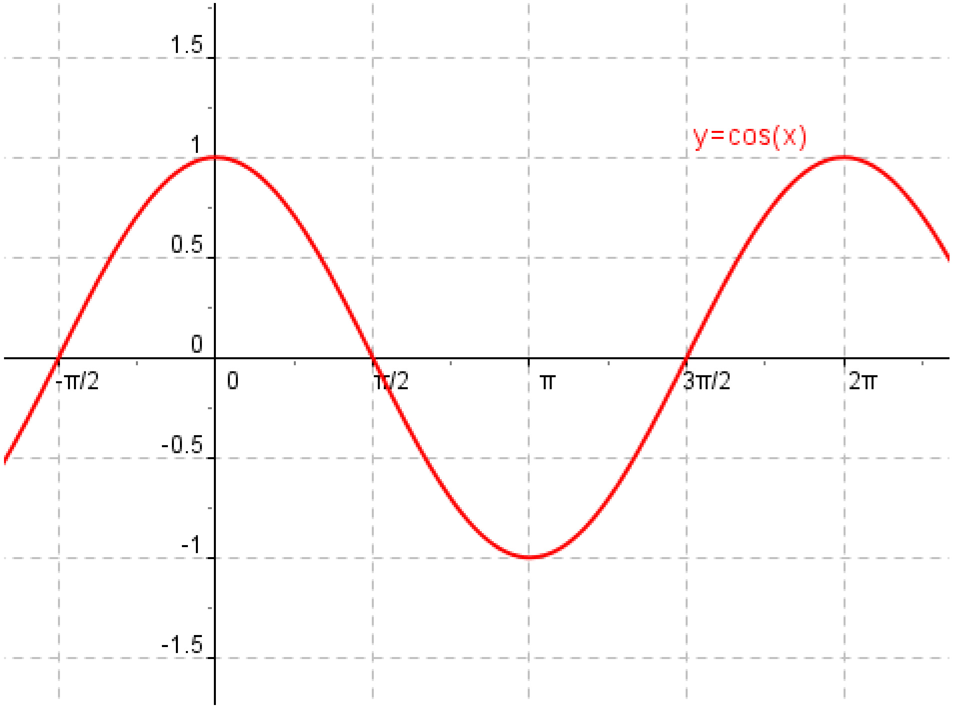


- **Dominio:** $\mathbb{R}$
- **Recorrido:** $[-1, 1]$
- **Periodicidad:** Es periódica, con período 2π .

Función coseno

$$f(x) = \cos x$$

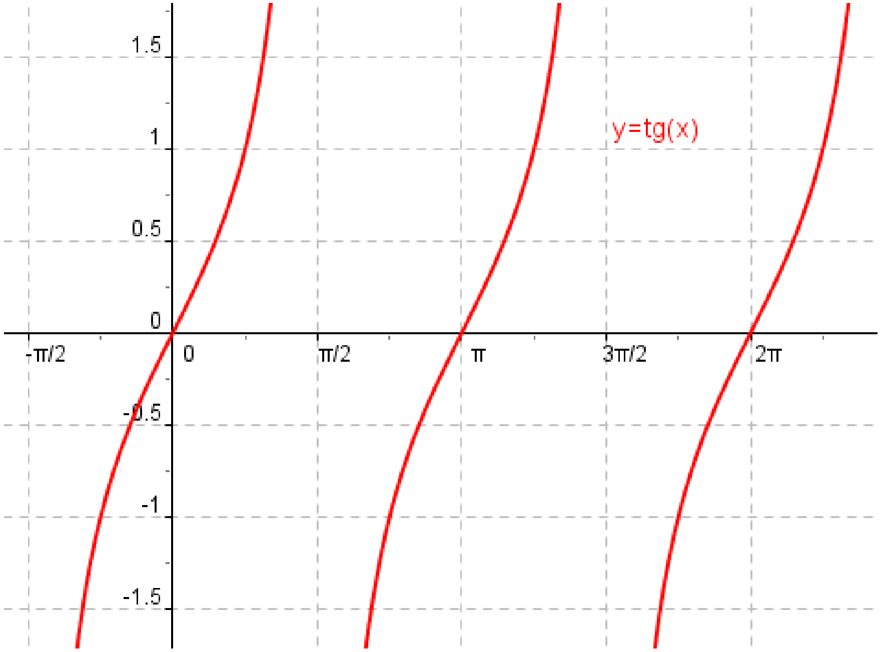
- **Dominio:** $\mathbb{R}$
- **Recorrido:** $[-1, 1]$
- **Periodicidad:** Es periódica, con período 2π .



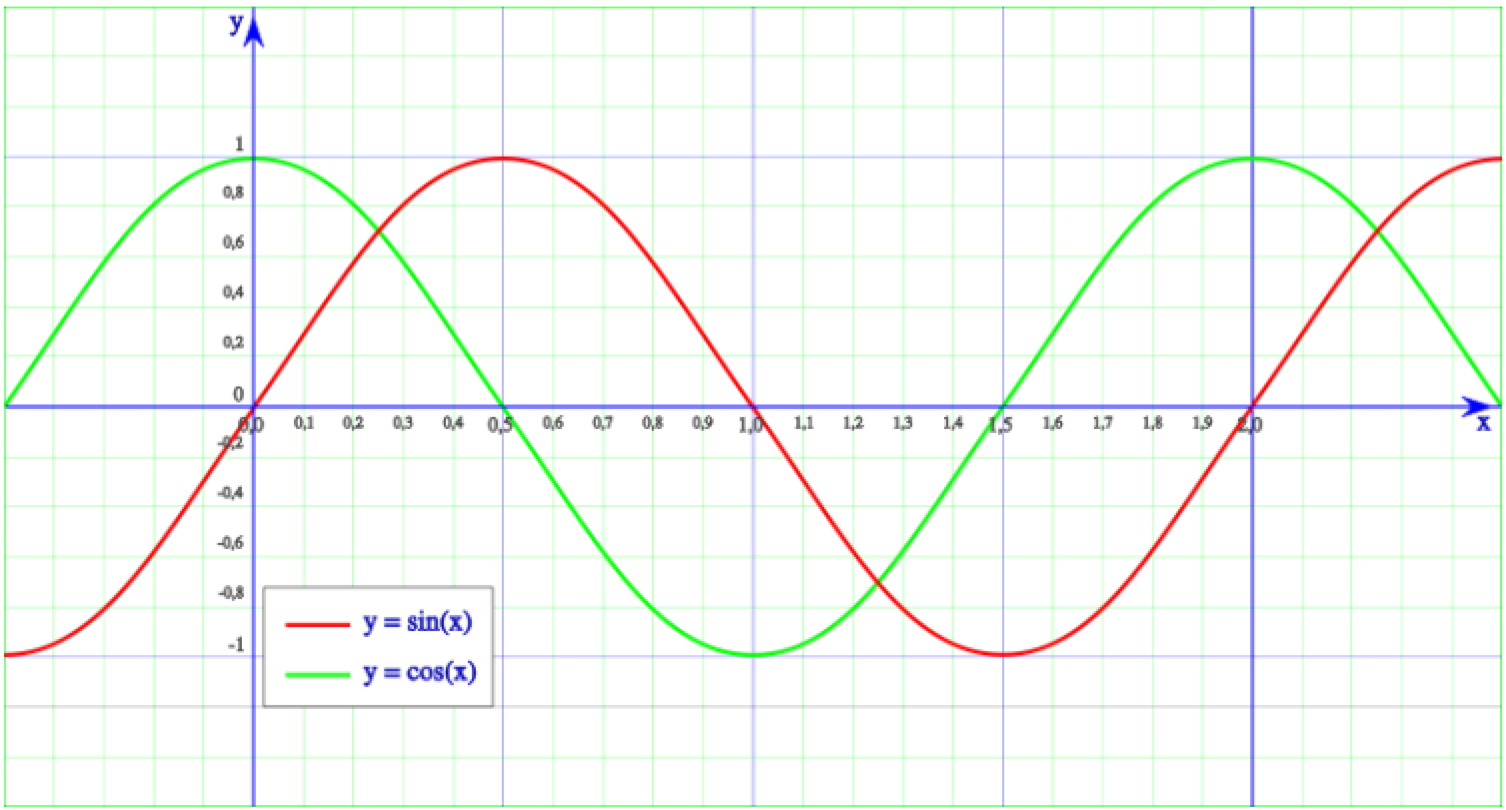
Función tangente

$$f(x) = \tan x$$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{\pi/2 + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}\}$
- **Recorrido:** $\mathbb{R}$
- **Periodicidad:** Es periódica, con periodo π .



Comparación función seno y coseno



Funciones trigonométricas.

- En muchos videojuegos 2D side-scrolling los enemigos presentan un movimiento tipo función seno o coseno.

- Problema:
  - Recorrido varía entre -1 y 1.
  - Al ser funciones periódicas, para el seno nos interesa x entre -Pi y Pi, y para el coseno –Pi / 2 y Pi / 2.

Funciones trigonométricas.

Funciones Trigonométricas Inversas

- ¿Y si tenemos el valor de la razón trigonométrica y deseamos obtener el ángulo?

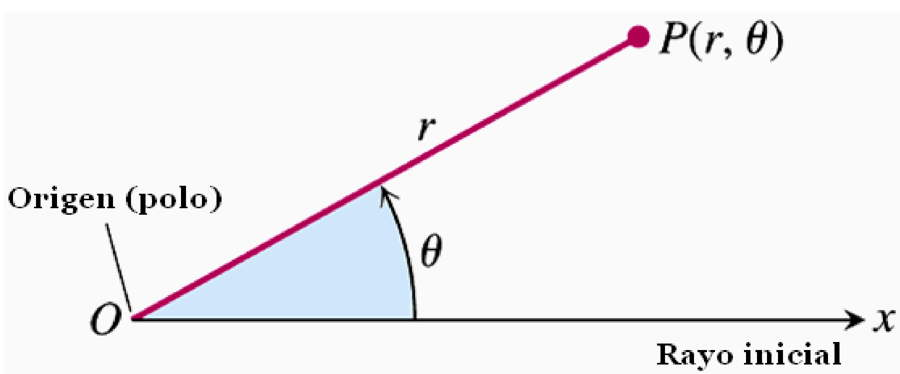
$$\sin^{-1} \propto = Arcsin \propto$$

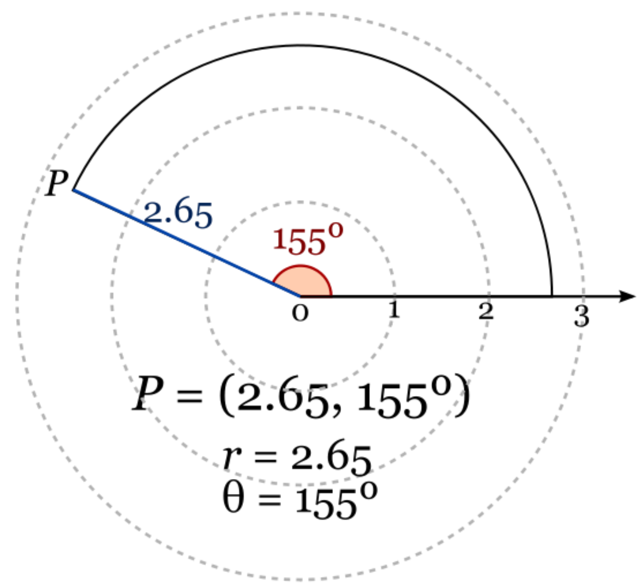
$$\cos^{-1} \propto = Arccos \propto$$

$$\tan^{-1} \propto = Arctan \propto$$

Coordenadas Polares

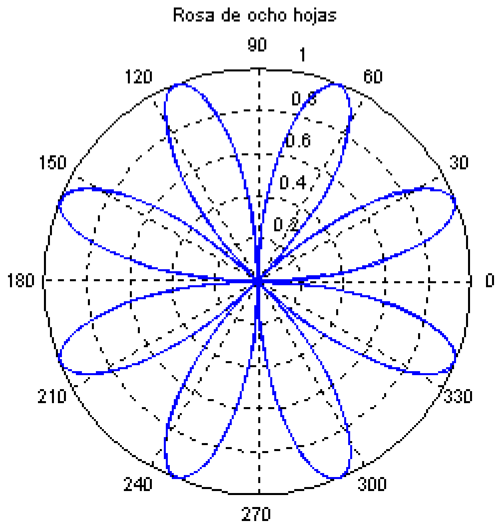
- Es un sistema de coordenadas donde cada punto o posición en el plano se determina por un ángulo y una distancia.

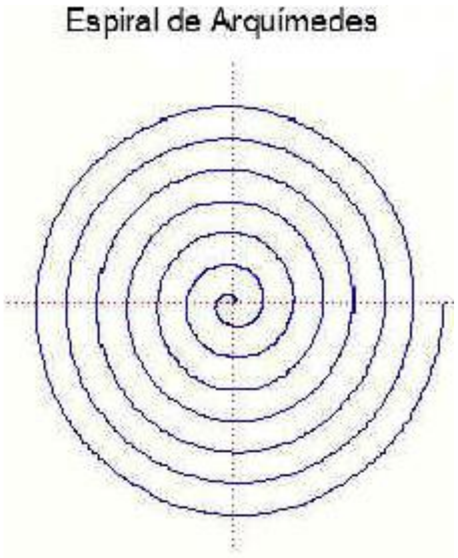


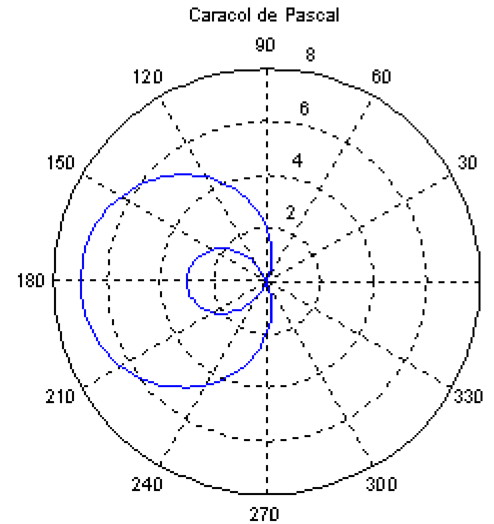


Coordenadas Polares

$r(\theta)$







$r(\phi) = \sin(4 * \phi)$

$r(\phi) = a + b * \phi$

$r(\phi) = 2 - 5 * \cos(\phi)$

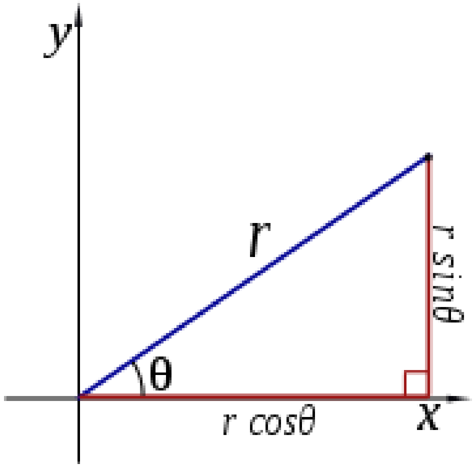
Coordenadas Polares

- Lo que nos interesa a nosotros son las coordenadas cartesianas, por lo que debemos realizar alguna transformación del ángulo y la distancia a coordenadas x, y.

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

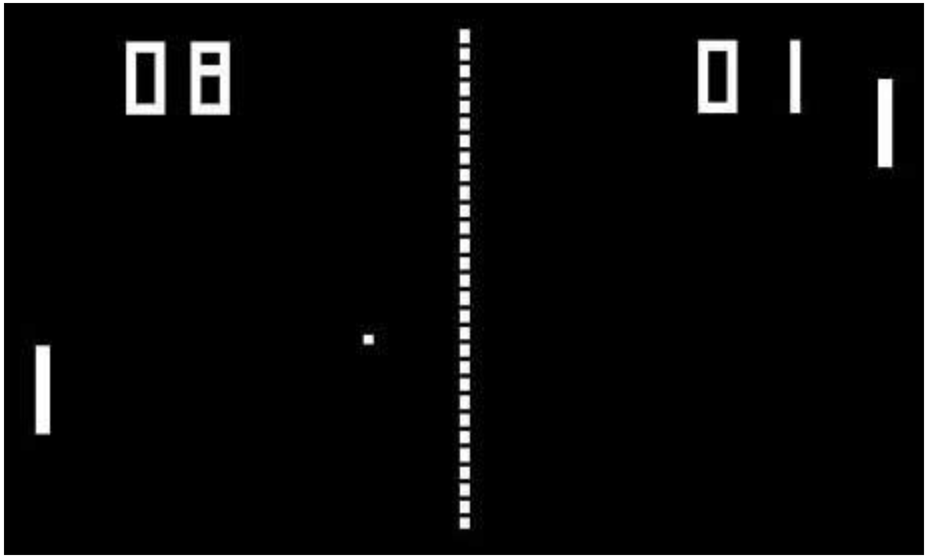


Coordenadas Polares

- Ahora ya podemos realizar los movimientos de funciones trigonométricas aplicando las transformaciones de coordenadas polares.

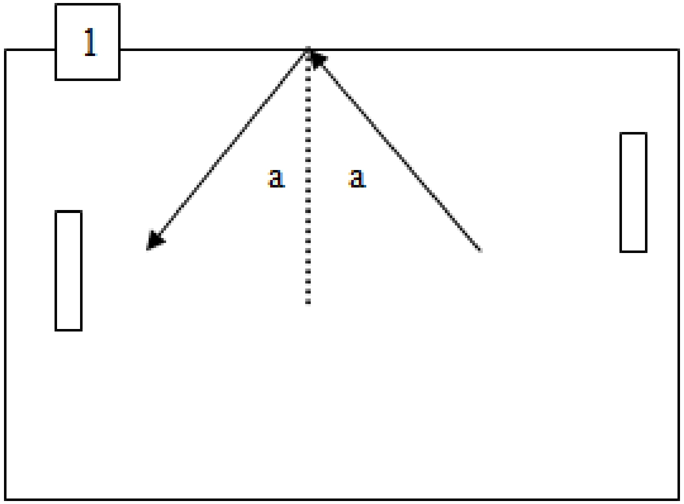
Videojuego Pong

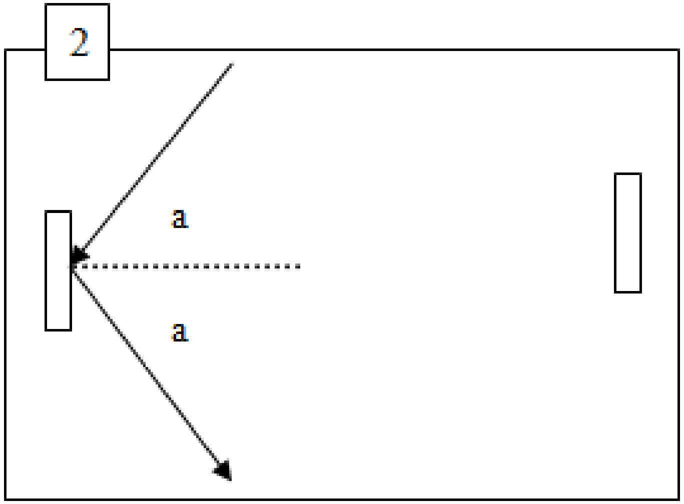
- Al chocar la pelota contra las paredes superior o inferior se produce un cambio de dirección, al igual que cuando choca las plataformas. Para modelar el movimiento lo hacemos con coordenadas polares ☺



Videojuego Pong

- Tenemos 4 casos distintos en que puede chocar la pelota:

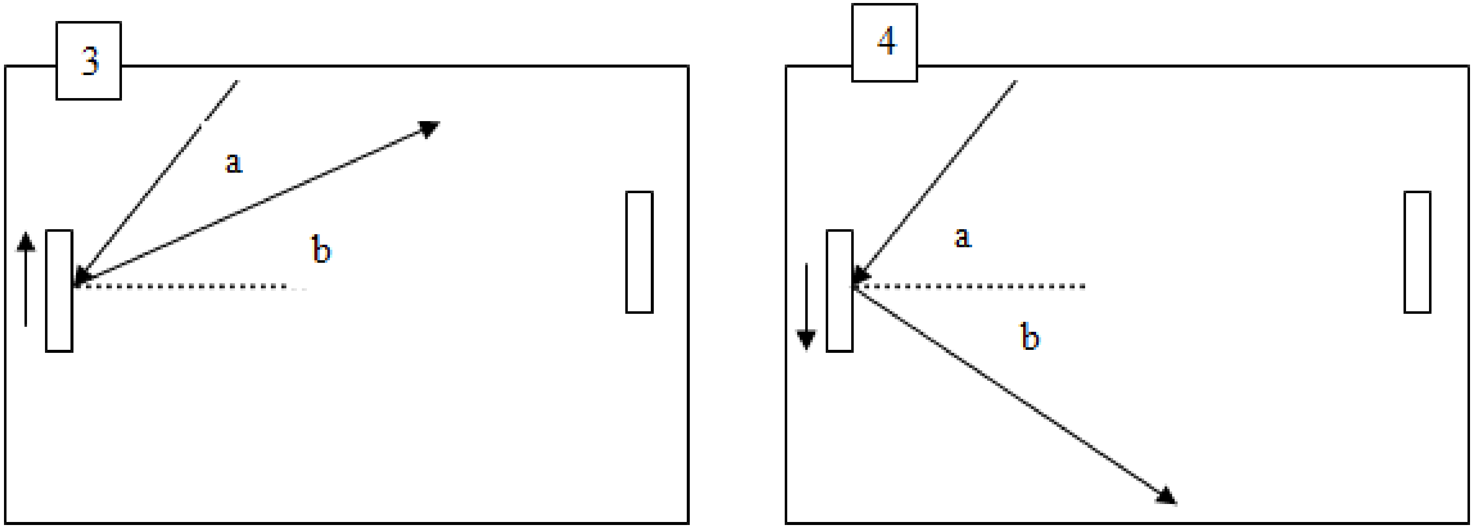




- Casos cuando el ángulo se mantiene.

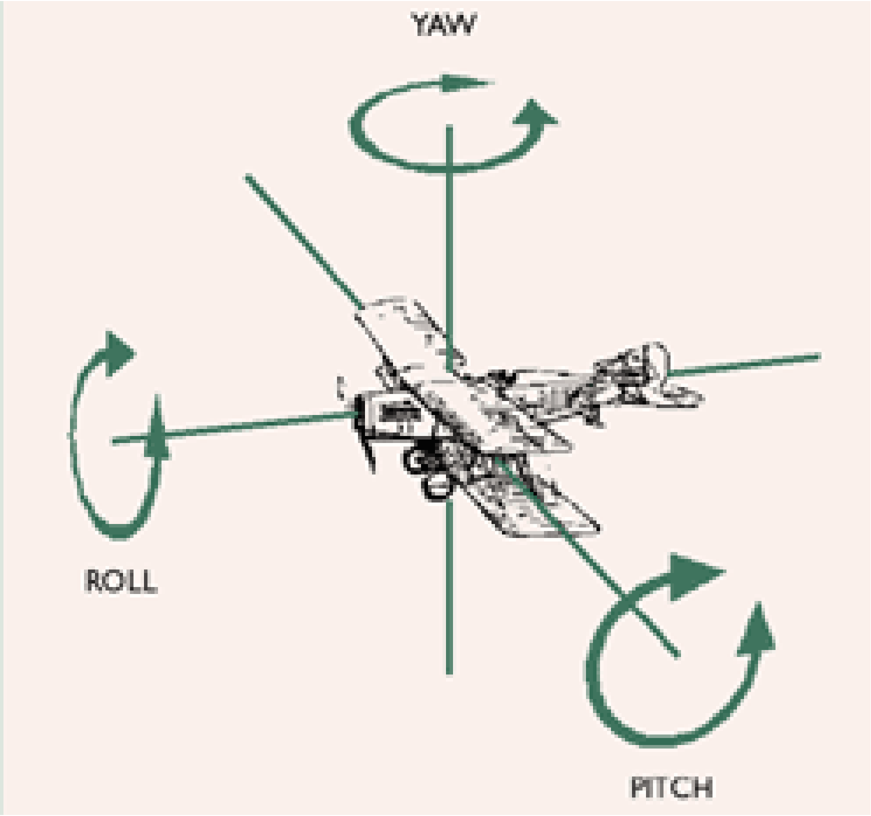
Videojuego Pong

- Tenemos 4 casos distintos en que puede chocar la pelota:

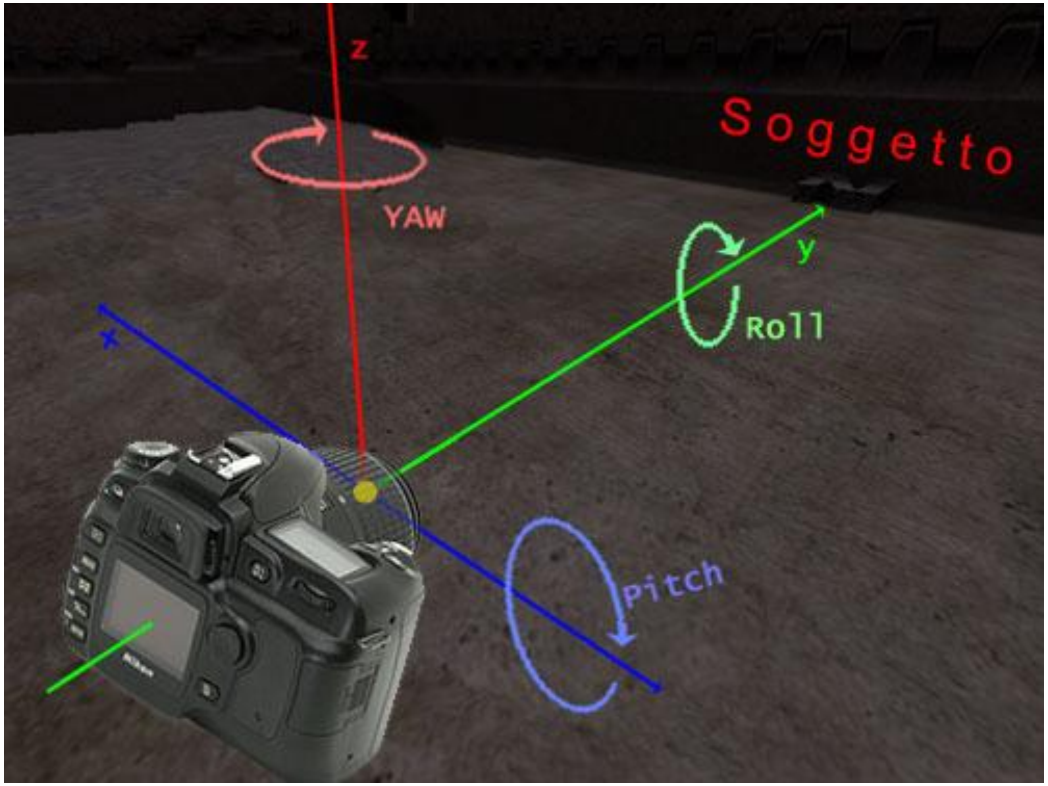


- Casos cuando el ángulo varía.

Rotaciones en 3D.



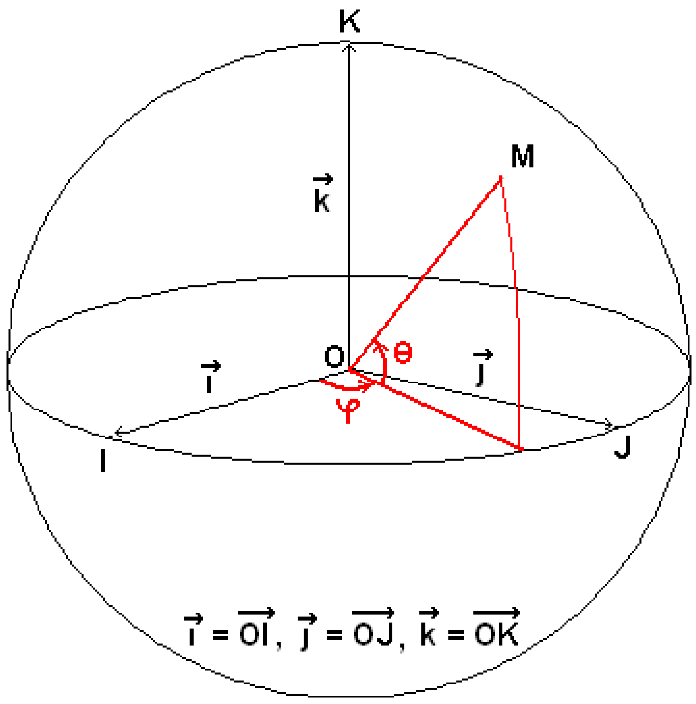
Rotaciones en 3D



Coordenadas Esféricas

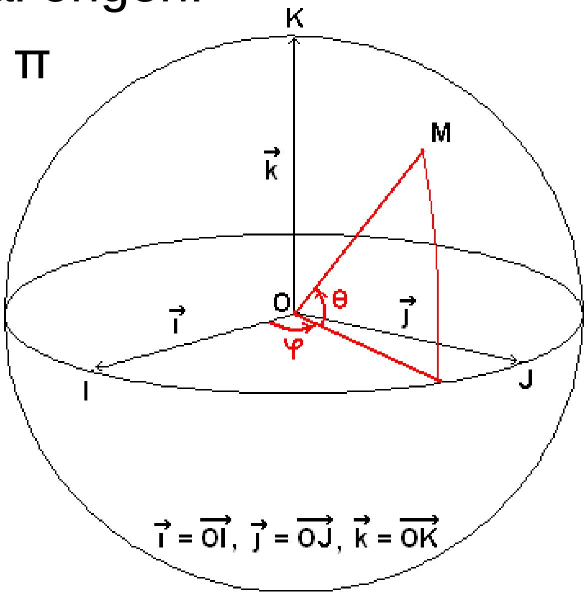
- El problema se complica un poco cuando deseamos trabajar en 3 dimensiones.

- Las coordenadas esféricas las utilizamos para definir la posición espacial de un punto mediante una distancia y 2 ángulos.



Coordenadas Esféricas

- Por lo que el punto p está representado por 3 magnitudes:
  - el radio r, es la distancia desde el punto al origen.
  - el ángulo polar o latitud θ, varía entre 0 a π
  - el ángulo azimuth φ, varía entre 0 a 2π.



$$0 \leq r < \infty \qquad 0 \leq \theta \leq \pi \qquad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

Coordenadas Esféricas

- Transformación con las coordenadas cartesianas.

$$x = r \operatorname{sen}\theta \cos\varphi \qquad y = r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \qquad z = r \cos\theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

- Con esto ya podemos diseñar en un videojuego 3D la cámara o el movimiento de componentes del mundo (balas, enemigos, etc.)

Identidades trigonométricas

- Las identidades trigonométricas son igualdades que involucran funciones trigonométricas y que nos pueden ayudar a la hora de minimizar términos, ya que una operación trigonométrica es muy costosa a la hora de utilizarla en el computador.

Identidades trigonométricas

- Propiedades básicas:

$$\operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}(x + 2\pi) \qquad \cos(x) = \cos(x + 2\pi) \qquad \tan(x) = \tan(x + \pi)$$

$$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}(x + \pi) \qquad \cos(-x) = -\cos(x + \pi) \qquad \tan(-x) = -\tan(x)$$

- Propiedad de ángulo complementario:

$$\operatorname{sen}(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \qquad \cos(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

Identidades trigonométricas

- Utilizando el teorema de Pitágoras:

$$\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

$$\operatorname{sen}(x) = \sqrt{1 - \cos^2(x)} \qquad \operatorname{sen}(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^{-2}(x)}}$$

Identidades trigonométricas

- Identidades de ángulo doble:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}2\theta &= 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta \\ &= \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 2\theta &= \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta \\ &= 2\cos^2\theta - 1 \\ &= 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta \\ &= \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}\end{aligned}$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

Identidades trigonométricas

- Identidades del medio ángulo:

$$\begin{aligned}\mathrm{sen}2\theta &= 2\mathrm{sen}\theta\cos\theta \\ &= \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 2\theta &= \cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\theta \\ &= 2\cos^2\theta - 1 \\ &= 1 - 2\mathrm{sen}^2\theta \\ &= \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}\end{aligned}$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

Para más identidades trigonométricas:
http://es.wikipedia.org/wiki/Identidad_trigonométrica

Tarea

- Para plasmar los conocimientos re-aprendidos referente a la trigonometría, deben elegir uno de los siguientes temas y realizar un análisis matemático.

- Análisis de un videojuego de Pool en 2D.
- Diseño de Cámara en tercera persona con dinámica.
- Diseño de movimientos de componentes en 3D utilizando funciones trigonométricas.