Matemáticas Aplicadas

para Diseño de Videojuegos

5. Matrices y Geometría Vectorial

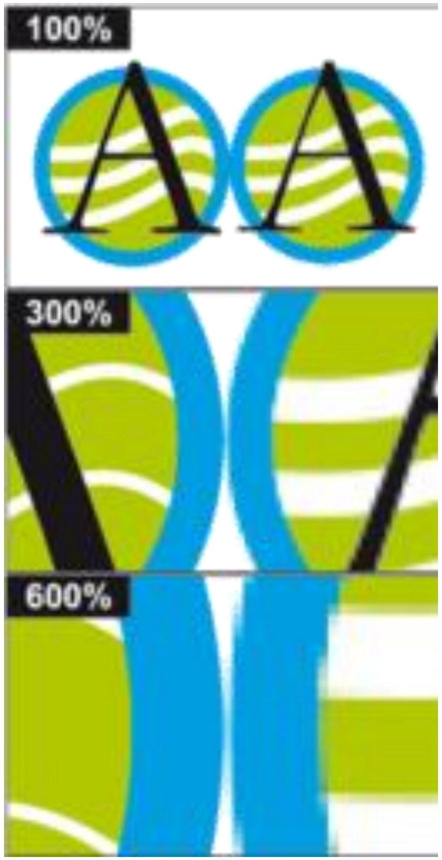
Fernando González

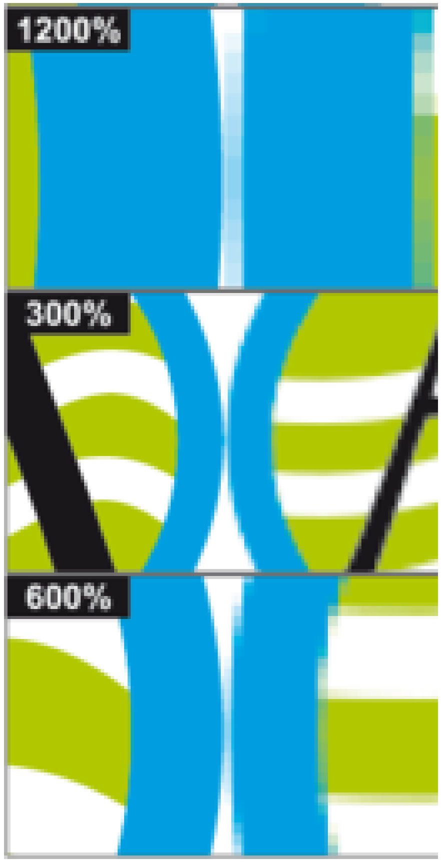
Contenidos

- Vectores
  - Componente de un vector.
  - Vectores unitarios.
  - Módulo, suma y producto escalar.
  - Gráficos vectoriales.
- Matrices
  - Definición.
  - Suma, producto por un escalar y multiplicación.
  - Matrices en gráfica computacional.
  - Confección de tableros.
  - Gráficos matriciales.
  - Diseño de mapas 2D basados en tiles.

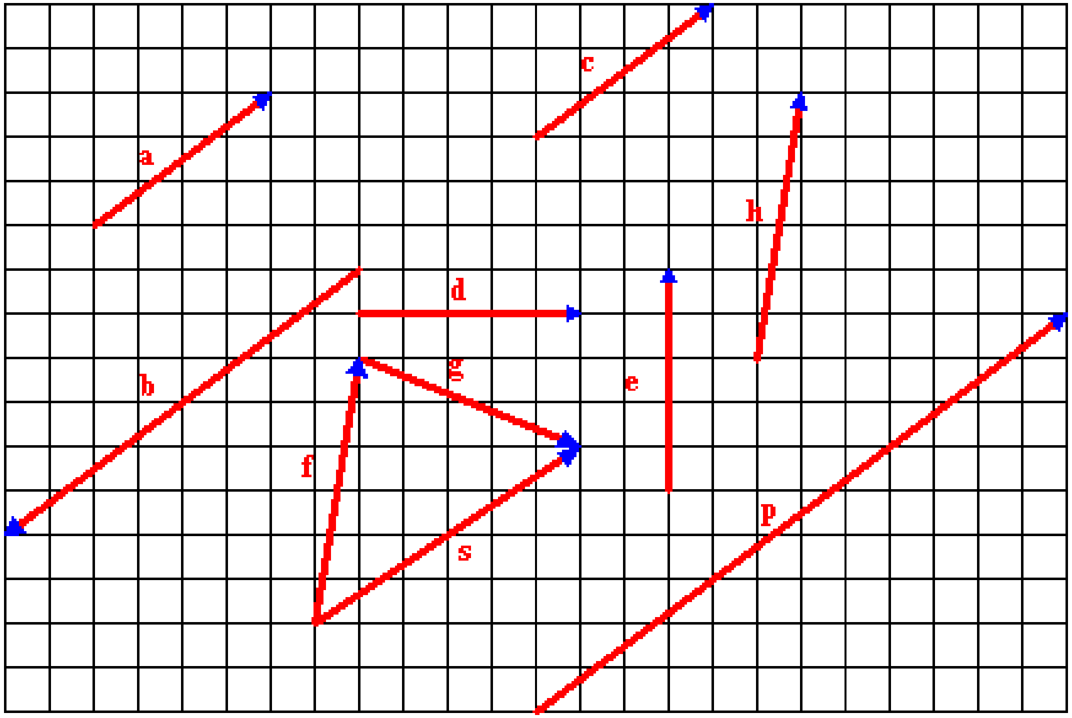
Gráficos vectoriales v/s matriciales

Gráficos vectoriales v/s matriciales



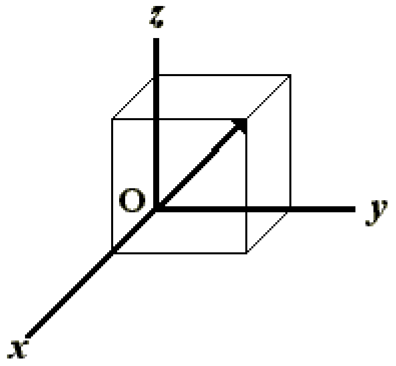


Vectores



Vectores

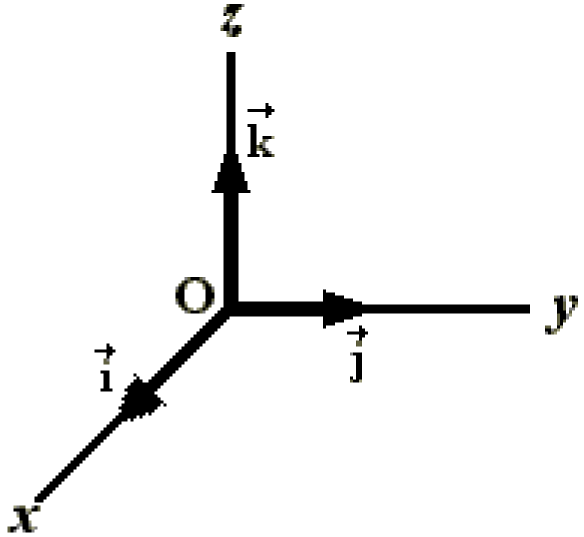
- Un vector es todo segmento de recta dirigido en el espacio, el cual presenta:
  - Un origen.
  - Un módulo o longitud.
  - Una dirección o orientación de la recta que lo contiene.
  - Un sentido que indica hacia qué lado se dirige.



Vectores bases unitarios

- Son vectores que tienen módulo 1.

- Para representar el sistema cartesiano, lo representaremos mediantes vectores unitarios, que corresponden a cada uno de los ejes del sistema de referencia, y por lo tanto son unidimensionales.



Componentes de un vector

- Cualquier vector puede ser representado como resultado de la suma de sus 3 vectores unidimensionales, cada uno de ellos en la dirección de sus ejes cartesianos.

$$\vec{r} = \vec{r}_x + \vec{r}_y + \vec{r}_z$$

Componentes de un vector

- Si consideramos ahora los vectores unitarios y notamos que la longitud del vector es sólo un escalar podemos sustituir cada uno de los sumandos de la expresión anterior por el producto de un escalar por el correspondiente vector unitario.

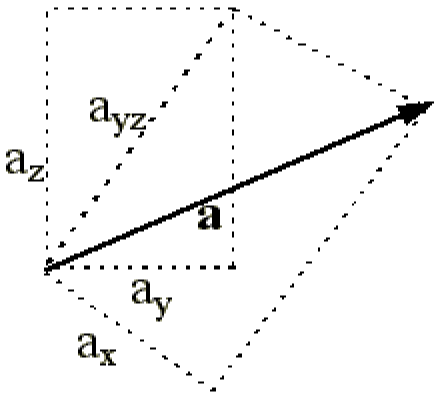
$$\vec{r}_x = \alpha\ \vec{u}_x\ ;\ \ \vec{r}_y = \beta\ \vec{u}_y\ ;\ \vec{r} = \gamma\ \ \vec{u}_z$$

- Por lo que:

$$\vec{r} = \alpha\,\vec{u}_x + \beta\,\vec{u}_y + \gamma\,\vec{u}_z$$

Módulo de un vector

- Un vector no solo nos da una dirección y un sentido, sino también una magnitud.
- *Gráficamente*: es la distancia que existe entre su origen y su extremo.



- Aplicando Pitágoras:

$$|a| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Vectores unitarios

- Un **vector unitario** tiene **de módulo la unidad.**

- La normalización de un vector consiste en asociarle otro **vector unitario**, de la **misma dirección** y **sentido** que el vector dado, dividiendo cada componente del vector por su módulo.

$$\vec{u}_{\vec{v}} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

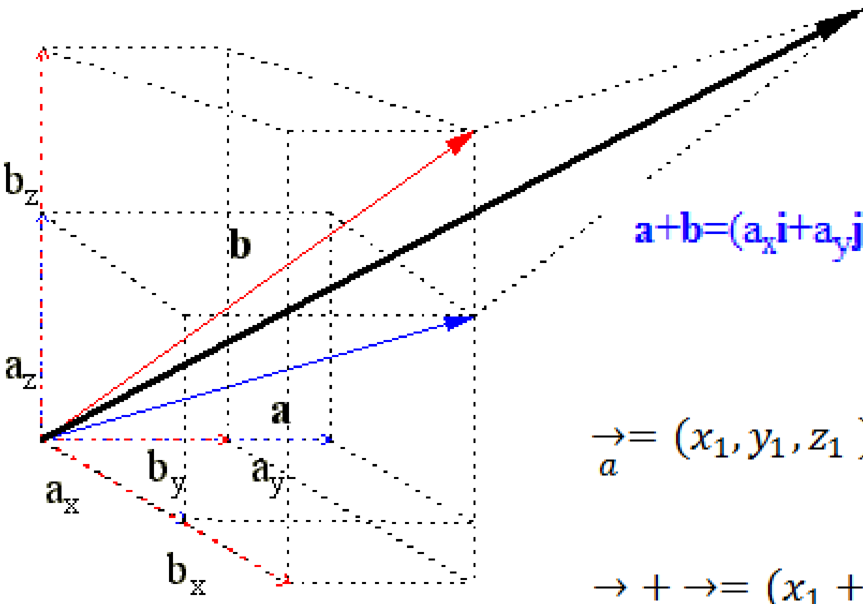
Componentes de un vector

- Por lo que el vector puede representarse de la siguiente forma:

$$\vec{r} = (x, y, z)$$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Suma y resta de vectores



$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=(a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k})+(b_x\mathbf{i}+b_y\mathbf{j}+b_z\mathbf{k})=(a_x+b_x)\mathbf{i}+(a_y+b_y)\mathbf{j}+(a_z+b_z)\mathbf{k}$$

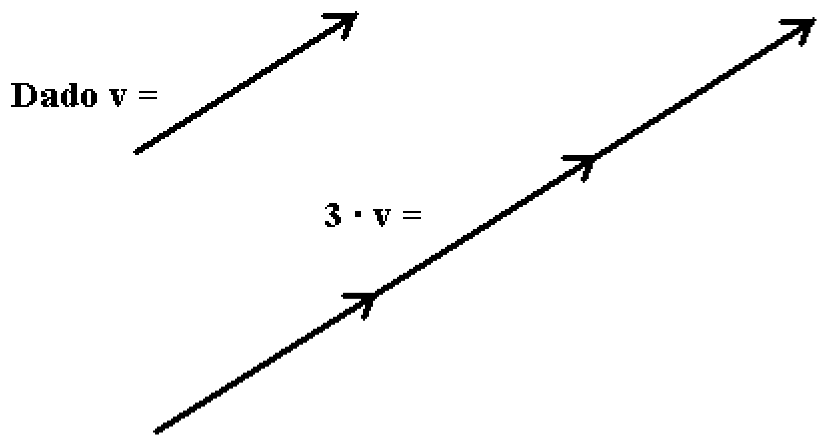
$$\vec{a}=(x_1,y_1,z_1) \qquad \vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$$

$$\vec{a}+\vec{b}=(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2)$$

$$\vec{a}-\vec{b}=(x_1-x_2,y_1-y_2,z_1-z_2)$$

Producto de un vector por un escalar

- El resultado de multiplicar un escalar **k** por un vector **v**, expresado analíticamente por **kv.**
- El módulo es **k** veces la longitud que representa el módulo de **v**



Producto punto

- El producto escalar o producto punto es una operación definida sobre un espacio vectorial cuyo resultado es una magnitud escalar.

- Es definido por:

$$\underset{a}{\rightarrow} \cdot \underset{b}{\rightarrow} = (x_1 \cdot x_2, y_1 \cdot y_2, z_1 \cdot z_2)$$

$$a \cdot b = |a| \cdot |b| \cdot \cos\alpha$$

Producto punto

- Para obtener el ángulo entre vectores:

$$\cos(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} + \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} \Rightarrow \alpha = \arccos(a,b)$$

$$\alpha = \arccos(a,b)$$

¿Para qué nos sirven en los videojuegos?

- Para representar de mejor manera la posición de los componentes del videojuego:
  - Ya no tenemos variables x, y, z sino que una estructura que nos indica la posición.

- Para representar de mejor manera la dirección a la que nos movemos.

¿Para qué nos sirven en los videojuegos?

- La mayoría de los motores de videojuegos utilizan vectores para representar en una figura:
  - La posición.
  - El escalamiento.
  - La traslación.

- Además representan los vértices de un modelo 3D como un vector. (x, y, z)

Gráficos vectoriales

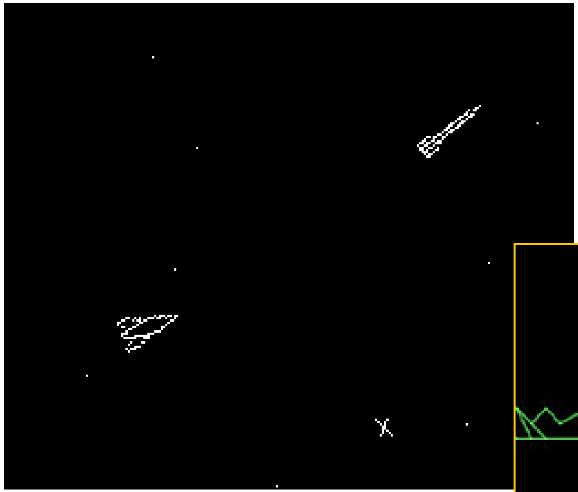
- Son imágenes formadas por objetos geométricos independientes, (segmentos, polígonos, arcos, etc.), cada uno de ellos definido por distintos **atributos matemáticos de forma**, de posición, de color, etc.

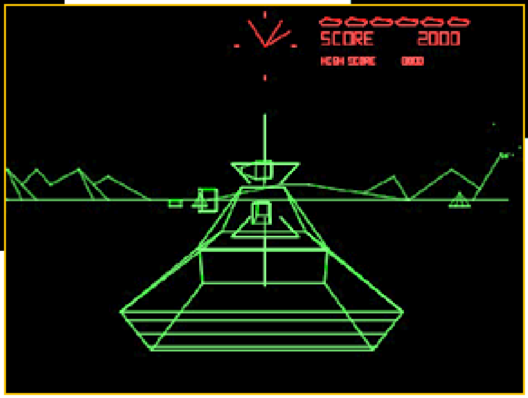
- Y es por estos atributos matemáticos de forma y posición que se denominan vectoriales.

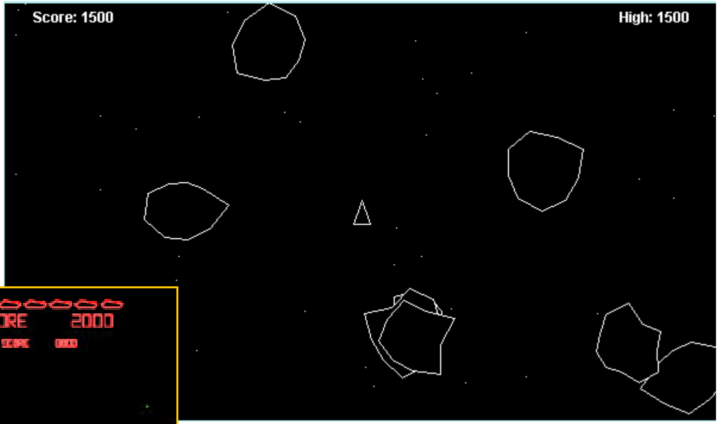
- Principales aplicaciones: formatos en la web como SVG y SWF, diseño de tipografía.

Videojuegos vectoriales

- Muchos de los primeros videojuegos se realizaban utilizando gráficos vectoriales.








MATRICES

Matrices

- Comenzó a utilizarse en los años 1850 como una forma abreviada de escribir un sistema de *m* ecuaciones lineales con *n* incógnitas.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}$$

Matrices

- Hoy en día además son utilizadas para la organización de los datos.

$$\begin{array}{cc} & \text{Columnas} \\ \text{Filas} & \left[\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\right] \end{array}$$

- *Se llama* **matriz** *de orden "$m \times n$" a un conjunto rectangular de elementos a_{ij} dispuestos en m filas y en n columnas.*

Suma de matrices

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{11} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{11}+b_{11} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 4 & 1 & -7 \end{pmatrix} \; ; \; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 7 \\ 1 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Producto de un número por un escalar

$$\lambda \begin{bmatrix} a_{11} & a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{11} & \lambda a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 8 \end{pmatrix} \quad ; \quad (-5)\cdot A = \begin{pmatrix} -5 & 10 & -15 \\ 0 & -5 & -40 \end{pmatrix}$$

Producto entre matrices

- Dadas dos matrices A = $(a_{ij})m\times n$ y B = $(b_{ij})p\times q$ *donde* $n = p$*, es decir, el número de columnas de la primera matriz* A *es igual al número de filas de la matriz* B *, se define el producto* A·B *de la siguiente forma :*

- El elemento aque ocupa el lugar (i, j) en la matriz producto se obtiene sumando los productos de cada elemento de la fila i de la matriz A por el correspondiente de la columna j de la matriz B.

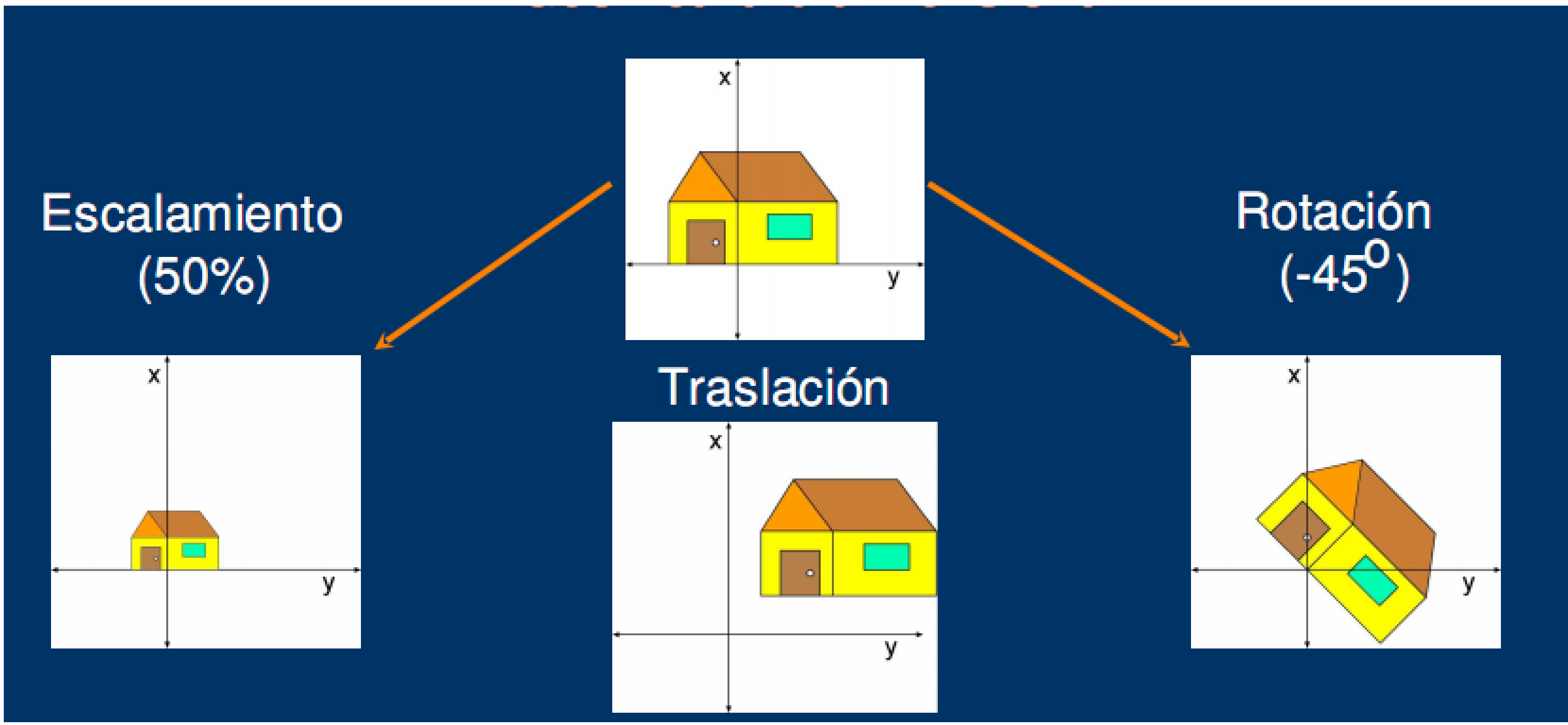
Matrices en Gráfica Computacional

- La aplicación principal que nos interesa de las matrices son la utilización de gráficos, tanto 2D como 3D.

- Las tarjetas de videos realizan todo el procesamiento de gráficos utilizando matrices, se tiene una matriz de posición, de traslación, de escalamiento, de rotación y de la vista.

- Para aprovechar esto, algunos motores de videojuegos se la están jugando por trabajar con matrices como XNA.

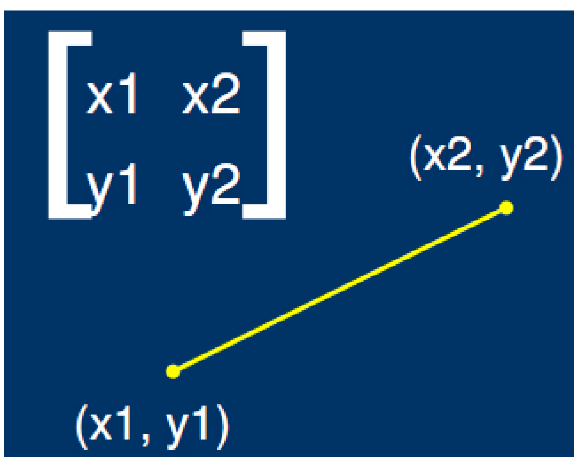
Matrices en Gráfica Computacional

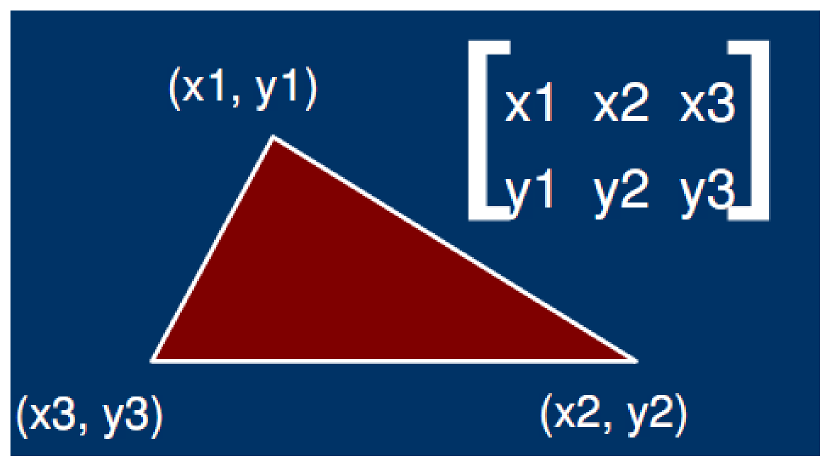


Matrices en Gráfica Computacional

- ¿Cómo representar con matrices?

- Por ejemplo una línea es representada por sus puntos extremos y un triángulo por 3 puntos:





Matrices en Gráfica Computacional

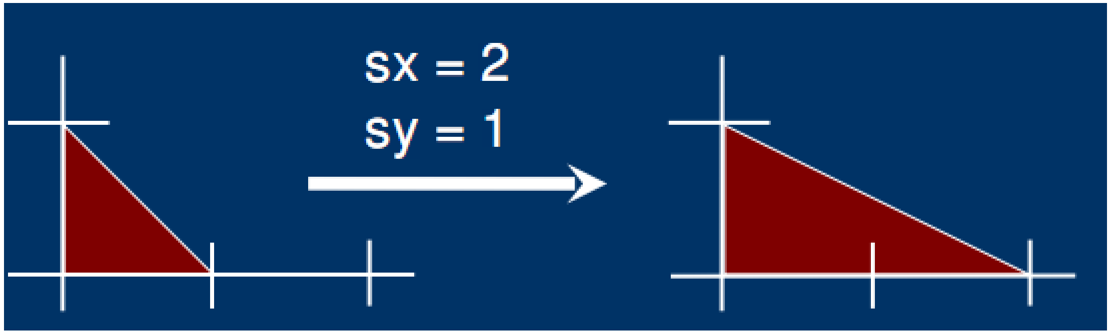
- ¿Cómo representar con matrices?

- Un modelo 3D, contiene polígonos, generalmente triángulos, representados de forma matricial, donde además cada uno de esos polígonos contiene vértices que también se representan de forma matricial.

Escalamiento

- Factores (sx, sy) permiten incrementar o decrementar el valor de las coordenadas (x,y) del objeto.

$$x' = sx * x$$
$$y' = sy * y$$



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sx & 0 \\ 0 & sy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Escalamiento

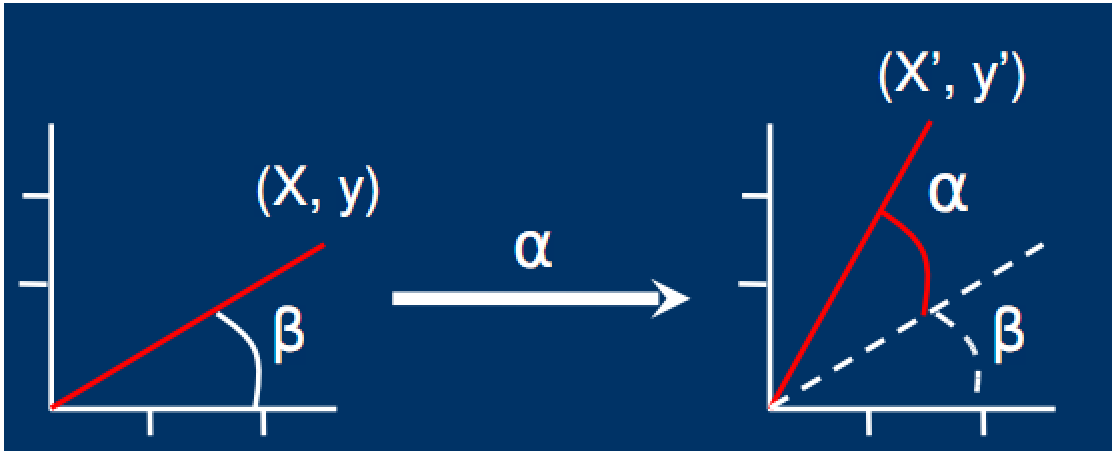
$$P = \begin{bmatrix} x0 & x1 & \dots & xn \\ y0 & y1 & \dots & yn \end{bmatrix} \quad S1 = \begin{bmatrix} 1.2 & 0 \\ 0 & 1.2 \end{bmatrix} \quad S2 = \begin{bmatrix} 0.7 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Solución:

$$P' = \begin{bmatrix} 1.2 & 0 \\ 0 & 1.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} P = S1 * S2 * P$$

Rotación

$$x' = x * \cos(\alpha) - y * \operatorname{sen}(\alpha)$$
$$y' = x * \operatorname{sen}(\alpha) + y * \cos(\alpha)$$

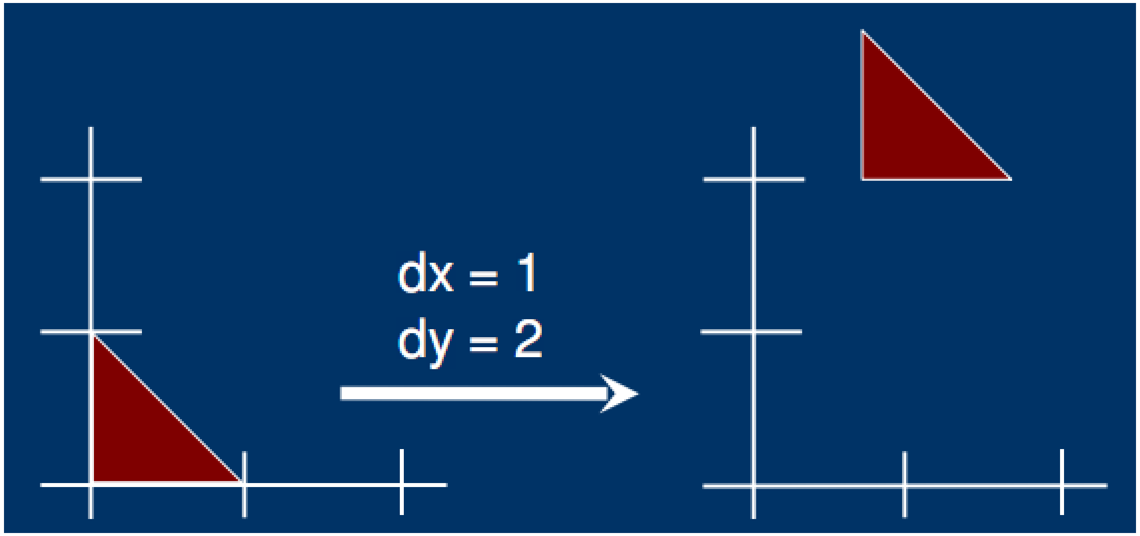


$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\operatorname{sen}(\alpha) \\ \operatorname{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

Traslación

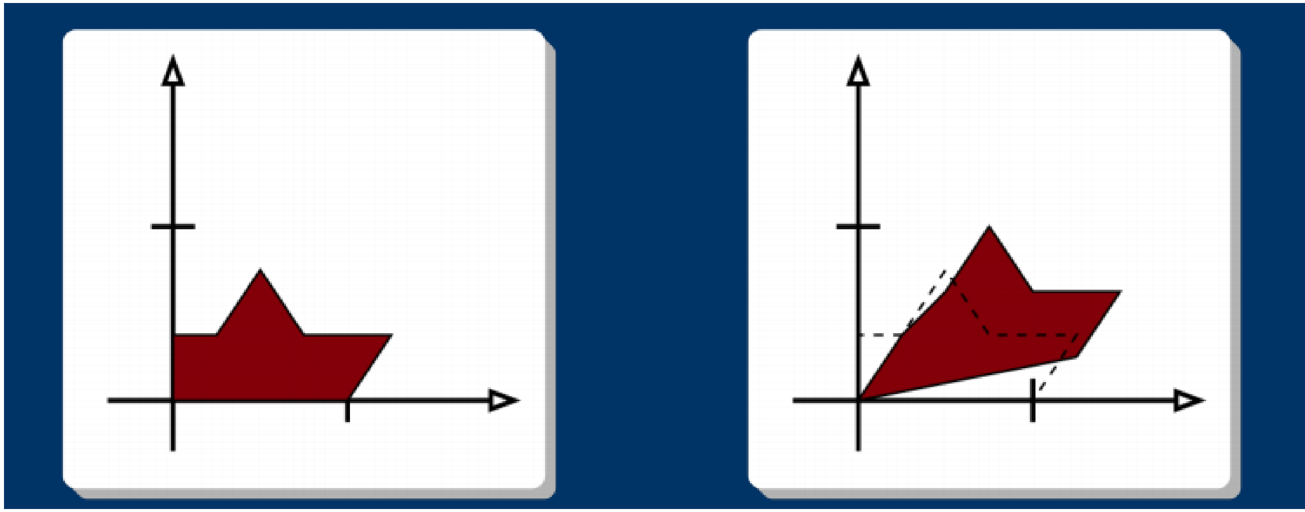
$x' = dx + x$

$y' = dy + y$



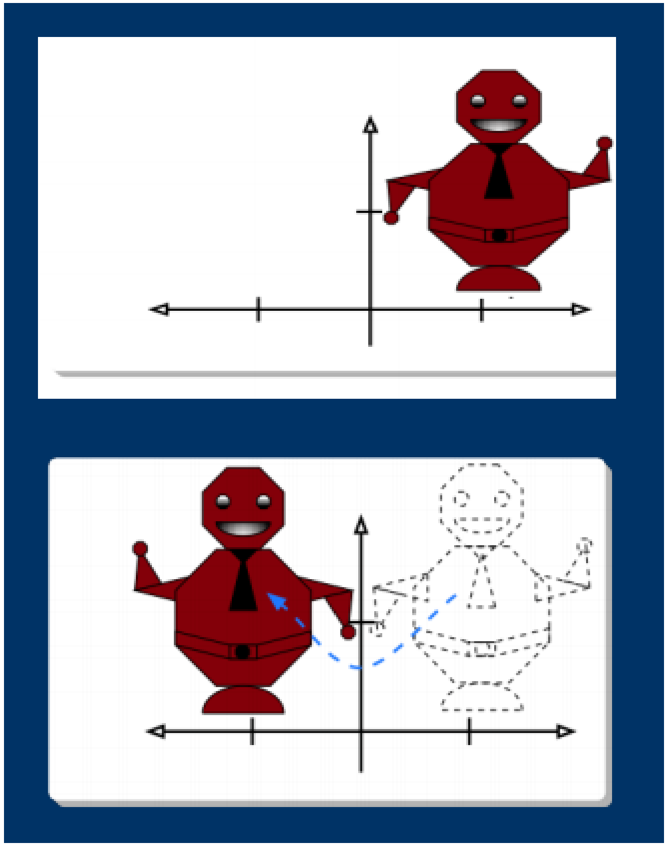
Shearing

$$\begin{bmatrix} 1 & Shx & 0 \\ Shy & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



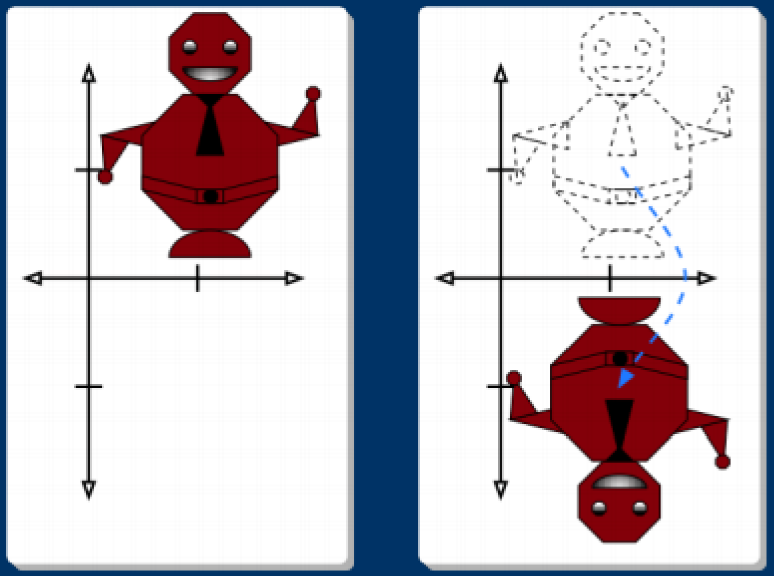
Reflexión en el eje Y

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Reflexión en el eje X

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



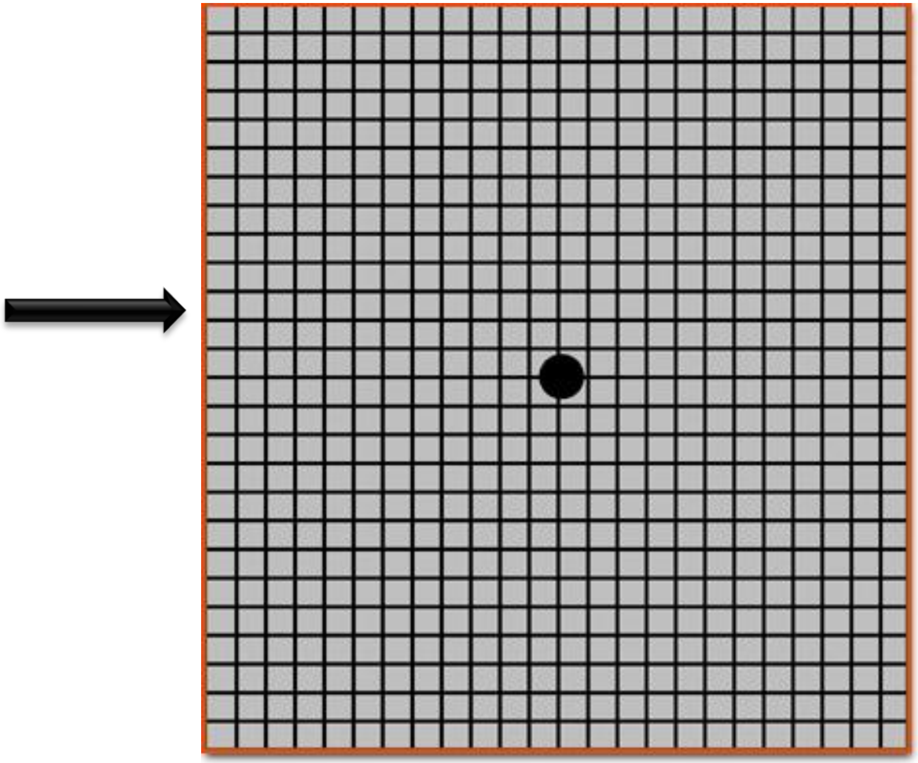
Más Aplicaciones de las matrices

- Como mencionamos anteriormente:
  - Las Matrices hoy en día también son utilizadas para la organización de los datos.

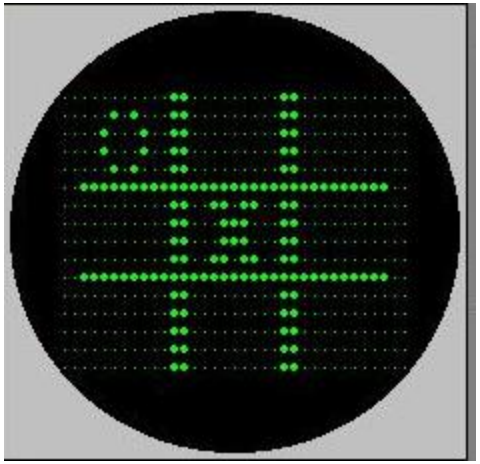
- Ejemplos de esto son:
  - Representación matricial de una imagen.
  - Diseño de mapas basados en tiles para videojuegos 2D.
  - Diseño de tableros para videojuegos de tableros.

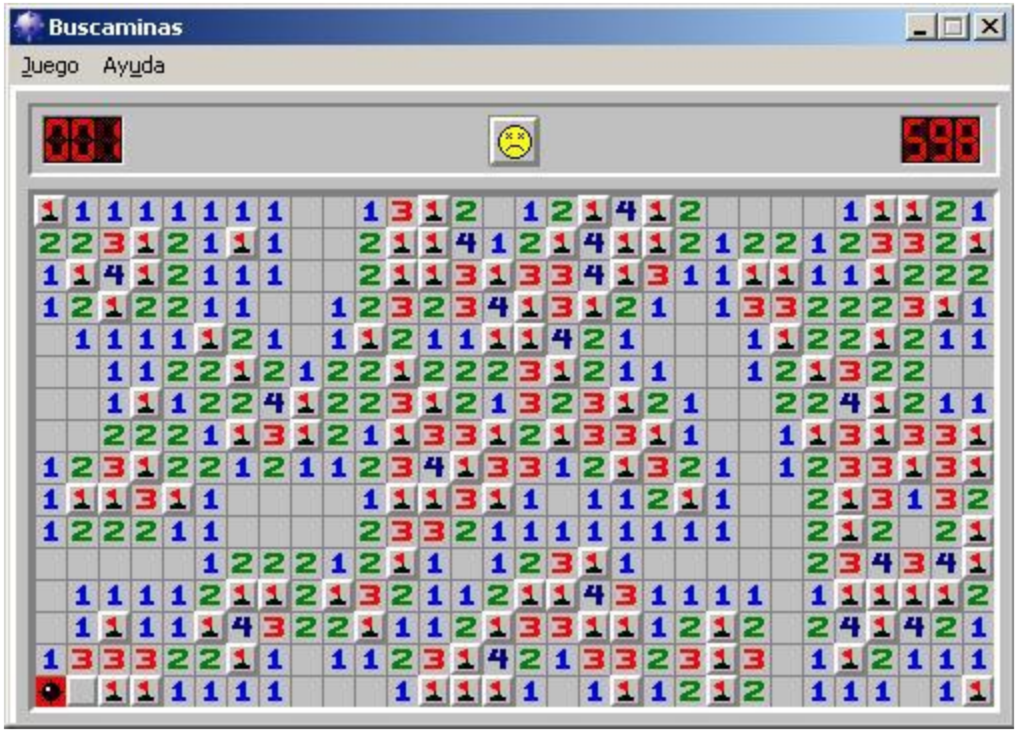
Bitmap: Gráficos matriciales

Bitmap: Gráficos matriciales

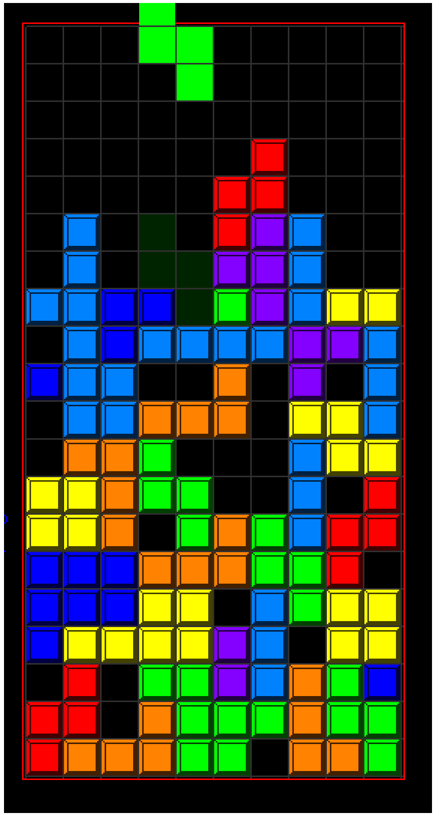


Videojuegos de tablero.





Videojuegos de tablero.



Videojuegos de tablero.

1					7		9	
	3			2				8
		9	6			5		
		5	3			9		
	1			8				2
6					4			
3							1	
	4							7
		7				3		

1	6	2	8	5	7	4	9	3
5	3	4	1	2	9	6	7	8
7	8	9	6	4	3	5	2	1
4	7	5	3	1	2	9	8	6
9	1	3	5	8	6	7	4	2
6	2	8	7	9	4	1	3	5
3	5	6	4	7	8	2	1	9
2	4	1	9	3	5	8	6	7
8	9	7	2	6	1	3	5	4

Tarea

Parte 1: 30%

- En muchos videojuegos de tablero con fichas, si uno selecciona una ficha, nos indica a qué casillas podemos movernos con ella, es por ello que se le pide que para un juego de ajedrez, dado el estado en que se encuentra el tablero, indique a qué casillas puede moverse cada una de las piezas.

Tarea

Parte 2: 50%

- Diseñar el mapa completo (un nivel) de un videojuego 2D “**propio”** con la aplicación Tile Studio, además de animaciones de personajes y componentes del mundo (balas, fuego, etc.).
- Para simplificar la calidad de las imágenes, se deberá pensar que el videojuego a diseñar es para dispositivos móviles como celulares o pda’s.

Tarea

Parte 3: 20%

- Determine la función f(x) que dada la posición x del personaje nos indique la posición x de la matriz de tiles. Haga lo mismo para la posición y. ¿Qué problemas hay con sólo determinar la posición x, y del personaje? ¿cómo lo solucionaría?

- Note que al obtener las posiciones en la matriz de tiles podemos determinar si el personaje colisiona con el mundo o se activa alguna acción.